Exercice 1

Lorsqu'on joue à la roulette au casino, on peut miser sur un des 37 numéros. Si la bille s'arrête sur le numéro choisi, on gagne 35 fois sa mise.
Thomas se dit qu'en misant 2 € sur 30 numéros, il a une probabilité de $\frac{30}{37}$ de gagner 10 €.

1. Vérifier les calculs de Thomas en donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire modélisant son gain algébrique.

2. Thomas joue dix fois de suite en respectant sa stratégie. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où il gagne et G la variable aléatoire qui modélise son gain algébrique.

a. Montrer que $G = 70X - 600$.

b. Quelle loi suit X ? En déduire l'espérance de X.

c. En admettant que $E(G) = 70E(X) - 600$, quel gain moyen peut espérer Thomas ?

3. Thomas joue n fois, toujours avec la même stratégie. Existe-t-il une valeur de n qui lui soit favorable ?

Exercice 2

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.
On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique. On note S l'événement « le voyageur fait sonner le portique » et M l'événement « le voyageur porte un objet métallique ». On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.
On admet que :
– lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98 ;
– lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98.

Partie A

1. À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(\mathrm{M})$, $P_{\mathrm{M}}(\mathrm{S})$ et $P_{\overline{\mathrm{M}}}(\overline{\mathrm{S}})$.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. Montrer que $P(\mathrm{S}) = 0{,}02192$.
4. En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique. On arrondira le résultat à 10^{-3}.

Partie B

80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que, pour chaque personne, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,02192.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique parmi les 80 personnes de ce groupe.
1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.
3. Sans justifier, donner la valeur arrondie à 10^{-3} de :
a. la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique ;
b. la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique.
4. a. Donner la valeur du plus petit entier k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}9$.
b. Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 3

Un jeu de plateau se joue avec deux dés : un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et un dé dodécaédrique dont les faces sont numérotées de 1 à 12.

Pour avancer sur la piste de jeu, il faut lancer les deux dés. On avance alors d'autant de cases que la somme des numéros indiqués par les deux dés.

Partie A

On appelle X la variable aléatoire qui attribue au lancer du dé cubique le numéro de la face obtenue, Y celle qui attribue le numéro de la face obtenue au lancer du dé dodécaédrique, et Z la somme de X et de Y.

1. Déterminer la loi de X, puis celle de Y.

2. Déterminer $E(Z)$.

3. Justifier qu'on peut considérer les deux variables X et Y comme indépendantes.

4. En déduire $V(Z)$.

Partie B

Une règle est ajoutée en cours de jeu : si on obtient un total supérieur à 15, on a droit à un déplacement bonus de deux cases.

1. Quelle est la probabilité d'avoir ce bonus ?

2. On appelle B la variable aléatoire qui associe 1 si un joueur a eu le bonus, 0 s'il ne l'a pas eu, et S_n le nombre de bonus obtenus sur n lancers de deux dés.
Exprimer $E(S_n)$, puis $V(S_n)$.

3. On appelle Z_n le total des points obtenus au bout de n lancers des deux dés.
Calculer $E(Z_n + S_n)$.

4. Le parcours comporte 300 cases.
Quel nombre moyen de lancers de dés faut-il faire pour terminer le parcours ?

Exercice 4

On dispose de trois cartes numérotées de 1 à 3 dont les dos sont identiques. Le jeu de « la course à zéro » se joue à deux et consiste à tirer une carte puis à la remettre dans le paquet et à le mélanger avant de le donner à son adversaire. Chaque joueur possède un capital de 6 points et enlève de ce capital autant de points que l'indique la carte. S'il n'a pas assez de points pour enlever ce que la carte indique, il passe son tour. Le premier qui arrive à 0 exactement gagne la partie.
On note A_n la variable aléatoire qui donne la valeur du capital du joueur après n coups, et X_n la valeur de la n-ième carte tirée.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_1 et de X_2
2. Déterminer la loi de probabilité de A_2 et montrer que $E(A_2) = 6 - E(X_1 + X_2)$.
3. Sans déterminer la loi de probabilité de A_3, justifier que $E(A_3) \neq 6 - E(X_1 + X_2 + X_3)$.
4. Déterminer la valeur de $E(A_3)$ puis de $E(A_4)$.
5. Est-ce que $E(A_6) = 0$?
6. Existe-t-il une valeur de n telle que $E(A_n) = 0$?